Fundacja SIGNUM Koło Naukowe Gier

pdm.wi.pb.edu.pl

Czekając na ciągi

Adam Dzedzej

Uniwersytet Gdański

PDM, 13.12.2021

Plan

Plan

- Jak długo trzeba czekać?
- Który ciąg jest lepszy?
- Coś policzymy, to może coś nas zaskoczy.
- Sprytniejszy sposób liczenia.

Plan

Kiedy padnie orzeł?

- Ile rzutów średnio trzeba wykonać monetą, by otrzymać orła?
- Ile średnio rzutów trzeba wykonać, by padły dwa orły z rzędu?
- A jak długo będziemy czekać na szóstkę rzucając kostką?
- Na sekwencję 66?

Kiedy padnie orzeł?

- Ile rzutów średnio trzeba wykonać monetą, by otrzymać orła?
- Ile średnio rzutów trzeba wykonać, by padły dwa orły z rzędu?
- A jak długo będziemy czekać na szóstkę rzucając kostką?
- Na sekwencję 66?

Kiedy padnie orzeł?

- Ile rzutów średnio trzeba wykonać monetą, by otrzymać orła?
- Ile średnio rzutów trzeba wykonać, by padły dwa orły z rzędu?
- A jak długo będziemy czekać na szóstkę rzucając kostką?
- Na sekwencję 66?

Kiedy padnie orzeł?

- Ile rzutów średnio trzeba wykonać monetą, by otrzymać orła?
- Ile średnio rzutów trzeba wykonać, by padły dwa orły z rzędu?
- A jak długo będziemy czekać na szóstkę rzucając kostką?
- Na sekwencję 66?

Który ciąg jest lepszy?

Gra Penney'a

Spośród ciągów tej samej długości gracze A i B wybierają sobie po jednym. Rzucamy monetą do momentu aż któryś z ciągów wypadnie jako ciąg **kolejnych** *wyników. Wygrywa ten gracz, do którego należy ten ciąg.*

Na przykład gracze wybrali ciągi OOO i RRO.
Sekwencja rzutów: OOROOO. Wygrał gracz OOO.
Sekwencja rzutów: OROORRO. Wygrał gracz RRO.

Który ciąg jest lepszy?

Gra Penney'a

Spośród ciągów tej samej długości gracze A i B wybierają sobie po jednym. Rzucamy monetą do momentu aż któryś z ciągów wypadnie jako ciąg **kolejnych** *wyników. Wygrywa ten gracz, do którego należy ten ciąg.*

Na przykład gracze wybrali ciągi OOO i RRO.
Sekwencja rzutów: OOROOO. Wygrał gracz OOO.
Sekwencja rzutów: OROORRO. Wygrał gracz RRO.

- Mamy do wyboru dwa ciągi *OOR* lub *ORO*. Który ciąg wybrać?

- Mamy do wyboru dwa ciągi *OOR* lub *ORO*. Który ciąg wybrać?
- Policzmy średni czas czekania na każdy z nich.

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

$$T(O|\emptyset) = 2$$

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

$$T(O|\emptyset) = 2$$

$$T(OO|R) = 1 + T(OO|\emptyset) = 1 + 6 = 7$$

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

$$T(O|\emptyset) = 2$$

$$T(OO|R) = 1 + T(OO|\emptyset) = 1 + 6 = 7$$

$$T(OOR|OOR) = 3$$

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

$$T(O|\emptyset) = 2$$

$$T(OO|R) = 1 + T(OO|\emptyset) = 1 + 6 = 7$$

$$T(OOR|OOR) = 3$$

$$T(OOR|R) = 1 + T(OOR|\emptyset)$$

Niech $T(A|X)$ oznacza średni czas czekania na ciąg A przy założeniu, że ciąg X wypadł na początku. Mamy wtedy na przykład

$$T(O|\emptyset) = 2$$

$$T(OO|R) = 1 + T(OO|\emptyset) = 1 + 6 = 7$$

$$T(OOR|OOR) = 3$$

$$T(OOR|R) = 1 + T(OOR|\emptyset)$$

$$T(A|X) = \frac{1}{2}T(A|XO) + \frac{1}{2}T(A|XR)$$

I ta ostatnia równość pozwala nam na obliczenia.

OOR

$$t = T(OOR|\emptyset) = \frac{1}{2}T(OOR|O) + \frac{1}{2}T(OOR|R)$$

$$T(OOR|O) = \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}T(OOR|OR) =$$

OOR

$$t = T(OOR|\emptyset) = \frac{1}{2}T(OOR|O) + \frac{1}{2}T(OOR|R)$$

$$\begin{aligned} T(OOR|O) &= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}T(OOR|OR) = \\ &= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}(2 + T(OOR|\emptyset)) \end{aligned}$$

OOR

$$
\begin{aligned}
t = T(OOR|\emptyset) &= \frac{1}{2}T(OOR|O) + \frac{1}{2}T(OOR|R) \\
T(OOR|O) &= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}T(OOR|OR) = \\
&= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}(2 + T(OOR|\emptyset)) \\
T(OOR|OO) &= \frac{1}{2}T(OOR|OOR) + \frac{1}{2}(T(OOR|OOO)) = \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1 + T(OOR|OO))
\end{aligned}
$$

OOR

$$t = T(OOR|\emptyset) = \frac{1}{2}T(OOR|O) + \frac{1}{2}T(OOR|R)$$

$$\begin{aligned} T(OOR|O) &= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}T(OOR|OR) = \\ &= \frac{1}{2}T(OOR|OO) + \frac{1}{2}(2 + T(OOR|\emptyset)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(OOR|OO) &= \frac{1}{2}T(OOR|OOR) + \frac{1}{2}(T(OOR|OOO)) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1 + T(OOR|OO)) \end{aligned}$$

$$\text{Stąd} \quad T(OOR|OO) = 4, \quad T(OOR|O) = 3 + \frac{1}{2}t$$

$$t = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \text{ czyli } t = 8.$$

ORO

$$t_2 = T(ORO|\emptyset) = \frac{1}{2}T(ORO|O) + \frac{1}{2}T(ORO|R)$$

ORO

$$t_2 = T(ORO|\emptyset) = \frac{1}{2}T(ORO|O) + \frac{1}{2}T(ORO|R)$$

$$\begin{aligned} T(ORO|O) &= \frac{1}{2}T(ORO|OO) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + T(ORO|O)) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) \end{aligned}$$

ORO

$$
\begin{aligned}
t_2 = T(ORO|\emptyset) &= \frac{1}{2}T(ORO|O) + \frac{1}{2}T(ORO|R) \\
T(ORO|O) &= \frac{1}{2}T(ORO|OO) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + T(ORO|O)) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) \\
T(ORO|OR) &= \frac{1}{2}T(ORO|ORO) + \frac{1}{2}(T(ORO|ORR)) = \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(3 + t_2) = 3 + \frac{1}{2}t_2
\end{aligned}
$$

ORO

$$
\begin{aligned}
t_2 = T(ORO|\emptyset) &= \frac{1}{2}T(ORO|O) + \frac{1}{2}T(ORO|R) \\
T(ORO|O) &= \frac{1}{2}T(ORO|OO) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + T(ORO|O)) + \frac{1}{2}T(ORO|OR) \\
T(ORO|OR) &= \frac{1}{2}T(ORO|ORO) + \frac{1}{2}(T(ORO|ORR)) = \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(3 + t_2) = 3 + \frac{1}{2}t_2
\end{aligned}
$$

Stąd $T(ORO|O) = 1 + 3 + \frac{1}{2}t_2$

$$t_2 = 2 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_2, \text{ czyli} \quad t_2 = 10.$$

Ile razy lepszy?

A więc na ciąg OOR trzeba czekać trochę krócej, więc wybieramy OOR.

Ile razy lepszy?

A więc na ciąg OOR trzeba czekać trochę krócej, więc wybieramy OOR.

Pytanie 1

Jaka jest szansa, że ciąg OOR wygra Grę Penney'a z ciągiem ORO?

Ile razy lepszy?

A więc na ciąg OOR trzeba czekać trochę krócej, więc wybieramy OOR.

Pytanie 1

Jaka jest szansa, że ciąg OOR wygra Grę Penney'a z ciągiem ORO?

Oznaczmy tym razem P_X szansę, że OOR wygra z ORO przy założeniu, że ciąg X pojawił się na początku.

Liczymy podobnie

$$P = P_{\emptyset} = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P$$

Liczymy podobnie

$$P = P_{\emptyset} = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P$$

$$P_O = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}P_{OR}$$

Liczymy podobnie

$$
\begin{aligned}
P = P_{\emptyset} &= \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P \\
P_O &= \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}P_{OR} \\
P_{OO} &= \frac{1}{2}P_{OOO} + \frac{1}{2}P_{OOR} = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Liczymy podobnie

$$
\begin{aligned}
P = P_\emptyset &= \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P \\
P_O &= \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}P_{OR} \\
P_{OO} &= \frac{1}{2}P_{OOO} + \frac{1}{2}P_{OOR} = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2} \\
P_{OR} &= \frac{1}{2}P_{ORO} + \frac{1}{2}P_{ORR} = 0 + \frac{1}{2}P_\emptyset
\end{aligned}
$$

Liczymy podobnie

$$P = P_\emptyset = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P$$

$$P_O = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}P_{OR}$$

$$P_{OO} = \frac{1}{2}P_{OOO} + \frac{1}{2}P_{OOR} = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}$$

$$P_{OR} = \frac{1}{2}P_{ORO} + \frac{1}{2}P_{ORR} = 0 + \frac{1}{2}P_\emptyset$$

Zatem $P_{OO} = 1, \quad P = P_O = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P$

$$P = \frac{2}{3}.$$

Liczymy podobnie

$$P = P_\emptyset = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P_R = \frac{1}{2}P_O + \frac{1}{2}P$$
$$P_O = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}P_{OR}$$
$$P_{OO} = \frac{1}{2}P_{OOO} + \frac{1}{2}P_{OOR} = \frac{1}{2}P_{OO} + \frac{1}{2}$$
$$P_{OR} = \frac{1}{2}P_{ORO} + \frac{1}{2}P_{ORR} = 0 + \frac{1}{2}P_\emptyset$$
$$\text{Zatem } P_{OO} = 1, \quad P = P_O = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P$$
$$P = \frac{2}{3}. \quad \text{Ciąg OOR jest dwa razy lepszy niż ORO}$$

Plan

Plan wystąpienia

Jak długo trzeba czekać?

Inne pojedynki

Formuła Conway'a

Jak pokonać OOR?

Jeśli mamy do wyboru każdy możliwy z ośmiu ciągów i pierwszy gracz wybrał OOR, to już wiemy, że nie warto wybierać ORO. Co zatem wybrać?

Fakt

Jeśli wybieramy ciąg, który jest negacją ciągu A, to mamy dokładnie 50% szans na wygraną w grze Penney'a?

Możemy zatem wziąć RRO i mamy równe szanse. A czy można lepiej?

Jak pokonać OOR?

Jeśli mamy do wyboru każdy możliwy z ośmiu ciągów i pierwszy gracz wybrał OOR, to już wiemy, że nie warto wybierać ORO. Co zatem wybrać?

Fakt
Jeśli wybieramy ciąg, który jest negacją ciągu A, to mamy dokładnie 50% szans na wygraną w grze Penney'a?

Możemy zatem wziąć RRO i mamy równe szanse. A czy można lepiej?

Odpowiedź:

ROO wygrywa! I to jak!

ROO vs OOR

Możemy wykonać podobne rachunki jak poprzednio albo zauważyć, że ROO wygra dokładnie wtedy, gdy pierwsza reszka pojawi się w jednym z pierwszych dwóch rzutów.

Fakt *ROO vs OOR*

W grze Penney'a ciągów ROO i OOR ten pierwszy wygrywa średnio 3 razy częściej.

ROO vs OOR

Możemy wykonać podobne rachunki jak poprzednio albo zauważyć, że ROO wygra dokładnie wtedy, gdy pierwsza reszka pojawi się w jednym z pierwszych dwóch rzutów.

Fakt *ROO vs OOR*

W grze Penney'a ciągów ROO i OOR ten pierwszy wygrywa średnio 3 razy częściej.

Fakt *Średni czas czekania*

Na ciąg ROO trzeba czekać średnio 8 rzutów, a więc **tyle samo** *co na OOR.*

Prawdopodobieństwa wygranej

Ostatecznie wszystkie możliwości mamy w tabeli

-	OOO	OOR	ORO	ORR	ROO	ROR	RRO	RRR
OOO	x	1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
OOR	1/2	x	2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
ORO	3/5	1/3	x	1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
ORR	3/5	1/3	1/2	x	1/2	1/2	3/4	7/8
ROO	7/8	3/4	1/2	1/2	x	1/2	1/3	3/5
ROR	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2	x	1/3	3/5
RRO	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3	x	1/2
RRR	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	x

Wnioski z tabeli

ROO vs OOR

ROO wygrywa z OOR w stosunku 3:1.

Wnioski z tabeli

ROO vs OOR
ROO wygrywa z OOR w stosunku 3:1.

RRO vs ROO
RRO wygrywa z ROO w stosunku 2:1.

Wnioski z tabeli

ROO vs OOR
ROO wygrywa z OOR w stosunku 3:1.

RRO vs ROO
RRO wygrywa z ROO w stosunku 2:1.

ORR vs RRO
ORR wygrywa z RRO w stosunku 3:1.

Wnioski z tabeli

ROO vs OOR
ROO wygrywa z OOR w stosunku 3:1.

RRO vs ROO
RRO wygrywa z ROO w stosunku 2:1.

ORR vs RRO
ORR wygrywa z RRO w stosunku 3:1.

OOR vs ORR
OOR wygrywa z ORR w stosunku 2:1.

OROO vs RORO

Średni czas czekania na OROO, to 18 rzutów.
Średni czas czekania na RORO, to 20 rzutów.

OROO vs RORO

Średni czas czekania na OROO, to 18 rzutów.
Średni czas czekania na RORO, to 20 rzutów.

Fakt
RORO wygrywa z OROO średnio 9:5.

Plan

John Horton Conway

(1937—2020)

Funkcja zakładki

Dla dwóch wzorców (słów) A i B definiujemy symbol $A \natural B$ mówiący jak dobrze się pokrywają. Jeśli k literowy początek słowa B pokrywa się z k literową końcówką słowa A, to dodajemy q^{k-1}, gdzie q jest liczbą liter alfabetu.

Przykłady:

$ORR \natural RRO = 11_2 = 3$

$RRO \natural ORR = 1$

$OROO \natural OROO = 1001_2 = 9.$

Fakt

Średni czas oczekiwania aż pojawi się wzorzec A wynosi $q \cdot A\natural A$*, gdzie* q *jest wielkością alfabetu, czyli* $\frac{1}{q}$ *jest prawdopodobieństwem wypadnięcia jednej litery.*

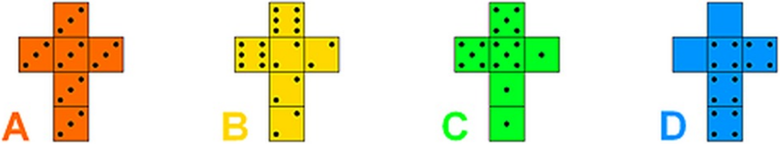
Fakt

Prawdopodobieństwo zwycięstwa słowa A nad słowem B w grze Penney'a dane jest wzorem

$$P(A \text{ pokona } B) : P(B \text{ pokona } A) = \frac{B\natural B - B\natural A}{A\natural A - A\natural B}$$

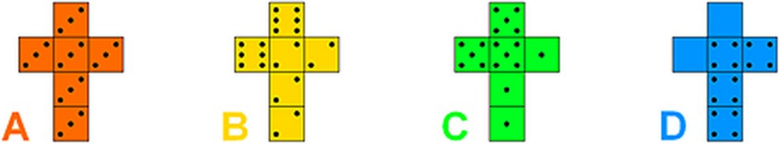
Dziękuję za uwagę.

Najbardziej znane kostki do gry, dla których zachodzi podobny fenomen, to **kości Efrona**



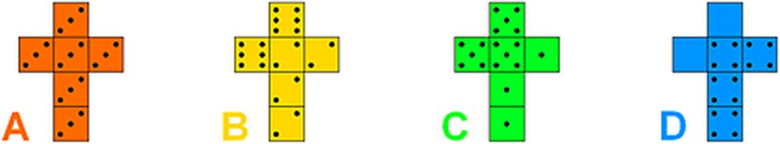
$$P(A > B) \quad = P(B > C) \quad = P(C > D) \quad = P(D > A)$$

Najbardziej znane kostki do gry, dla których zachodzi podobny fenomen, to **kości Efrona**



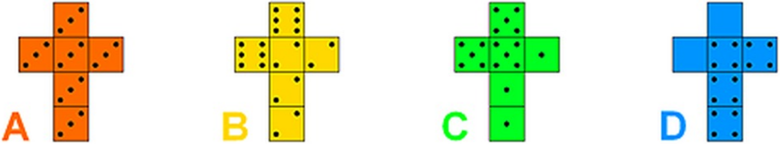
$P(A > B) = 2/3 \quad = P(B > C) \quad = P(C > D) \quad = P(D > A)$

Najbardziej znane kostki do gry, dla których zachodzi podobny fenomen, to **kości Efrona**



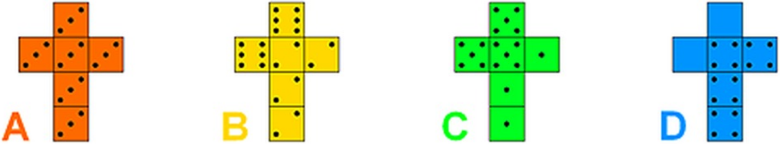
$$P(A > B) \quad = P(B > C) = 2/3 \quad = P(C > D) \quad = P(D > A)$$

Najbardziej znane kostki do gry, dla których zachodzi podobny fenomen, to **kości Efrona**



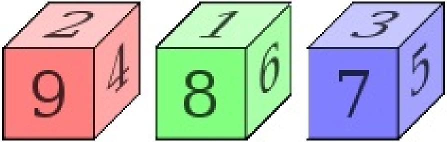
$P(A > B) \quad = P(B > C) \quad = P(C > D) = 2/3 \quad = P(D > A)$

Najbardziej znane kostki do gry, dla których zachodzi podobny fenomen, to **kości Efrona**



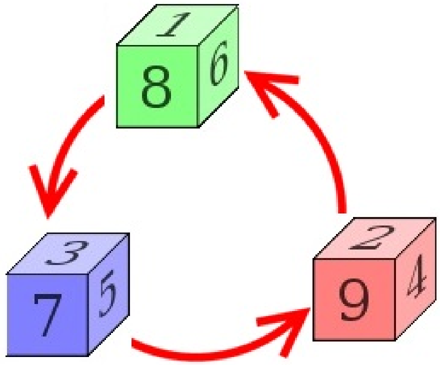
$$P(A > B) \quad = P(B > C) \quad = P(C > D) \quad = P(D > A) = 2/3$$

3 kostki

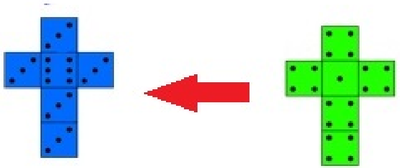


Na przeciwległych ściankach wpisano te same liczby.

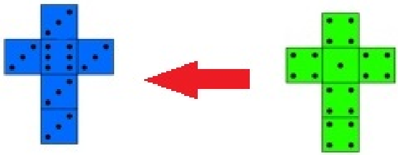
3 kostki



Grime

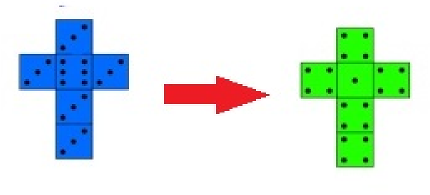


Grime



Gdy gramy jedna kostka przeciw jednej.

Grime



Gdy sumujemy wynik na dwóch identycznych kostkach.

Grime