O pewnych równaniach rekurencyjnych

Piotr Grzeszczuk
p.grzeszczuk@pb.edu.pl

Politechnika Białostocka

Podlaskie Dni Matematyki, 13 grudnia 2021

1. Liniowe rekurencje rzędu pierwszego o stałych współczynnikach.

Niech α, A, B będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Liniową rekurencją rzędu pierwszego nazywa się ciąg $\{a_n\}_{n\geq 0}$ taki, że

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = Aa_n + B \text{ dla } n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

W przypadku, gdy $A = 1$ taki ciąg nazywa się *arytmetycznym* o różnicy B. Jeśli natomiast $A \neq 0$ i $B = 0$, to $\{a_n\}_{n\geq 0}$ nazywa się *ciągiem geometrycznym* o ilorazie A.

Fakt

Jeśli $q \neq 1$, *to*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Dowód.

Niech $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$. Zauważmy, że

$$(1-q)S = S - qS = (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) - (q+q^2+\ldots+q^n)$$

$$= 1 - q^n.$$

Stąd wynika, że

$$S = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

$\square$

Wyznaczymy teraz wzór jawny na a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= Aa_{n-1} + B = A(Aa_{n-2} + B) + B = A^2 a_{n-2} + AB + B \\ &= A^2(Aa_{n-3} + B) + AB + B = A^3 a_{n-3} + A^2 B + AB + B = \ldots \\ &= A^n a_0 + A^{n-1} B + \ldots + A^2 B + AB + B \\ &= A^n a_0 + (1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) B. \end{aligned}$$

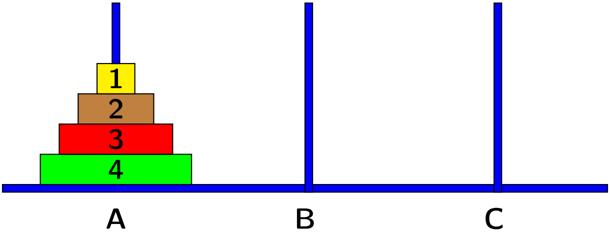
Wniosek

Jeśli ciąg $\{a_n\}_{n\geq 0}$ spełnia warunki (1), to

$$a_n = \begin{cases} A^n a_0 + B\dfrac{1 - A^n}{1 - A}, & \text{gdy } A \neq 1 \\ a_0 + nB, & \text{gdy } A = 1 \end{cases}$$

Przykład

(Wieże z Hanoi) Dane są trzy patyczki A, B, C. Na patyczek A nałożono w stos n-krążków różnej wielkości. Jaka jest najmniejsza liczba przełożeń tych krążków, tak aby wszystkie znalazły sią na patyczku B, przy czym można używać patyczka C, lecz nie wolno kłaść krążka większego na mniejszym.



Rozwiązanie. Oznaczmy przez H_n minimalną liczbę przełożeń n-krążków na patyczek B. Oczywiście $H_0 = 0$, $H_1 = 1$, $H_2 = 3$. W ogólnym przypadku, w celu odsłonięcia największego n-tego krążka należy krążki $1, 2, \ldots, n-1$ przełożyć na patyczek C. Można to wykonać H_{n-1} przełożeniami. Następnie przekładamy n-ty krążek na B. W tym momencie patyczek A jest bez krążków i po zastosowaniu H_{n-1} przełożeń, krążki $1, 2, \ldots, n-1$ przekładamy na B. Widzimy zatem, że

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

Korzystając z Wniosku, otrzymujemy wzór jawny $H_n = 2^n - 1$.

2. Liniowe rekurencje rzędu drugiego. Liniową rekurencją rzędu drugiego nazywa się ciąg $\{a_n\}_{n\geq 0}$ taki, że

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + C \text{ dla } n \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

gdzie α, β, A, B, C są danymi liczbami rzeczywistymi (przy czym $A, B \neq 0$). W przypadku, gdy $C = 0$ ciąg $\{a_n\}_{n\geq 0}$ nazywa się *jednorodną liniową rekurencją rzędu drugiego*.

Zajmiemy się rekurencjami jednorodnymi postaci:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \text{ dla } n \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Na moment zapomnijmy o warunkach początkowych $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ i dla ustalonych liczb A, B rozważmy zbiór ciągów

$$V = \{\{x_n\}_{n\geq 0} \mid \forall n \geq 0 \; x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n\}$$

Zauważmy, każdy ciąg z V jest jednoznacznie wyznaczony prze dwa pierwsze wyrazy x_0 i x_1. Zbiór V zamknięty jest względem dodawania ciągów i mnożenia ciągów przez liczby. To znaczy, dla dowolnych ciągów $\{x_n\}_{n\geq 0}, \{y_n\}_{n\geq 0} \in V$ oraz dowolnej liczby λ

$$\{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0} = \{x_n + y_n\}_{n\geq 0} \in V \tag{4}$$

$$\lambda\{x_n\}_{n\geq 0} = \{\lambda x_n\}_{n\geq 0} \in V \tag{5}$$

Wyznaczymy wszystkie ciągi geometryczne w zbiorze V. Przypuśćmy, że $\{q^n\}_{n\geq 0} \in V$, gdzie $q \neq 0$. Wtedy $q^{n+2} = Aq^{n+1} + Bq^n$, czyli

$$q^2 - Aq - B = 0 \tag{6}$$

Równanie $q^2 - Aq - B = 0$ nazywa się **równaniem charakterystycznym** rekurencji rzędu drugiego.
Możliwe są dwa przypadki:

1. wyróżnik $\Delta = A^2 + 4B \neq 0$.

Wtedy równanie(6) ma dwa różne pierwiastki q_1, q_2. Mamy więc dwa ciągi geometryczne $\{q_1^n\}_{n\geq 0}$, $\{q_2^n\}_{n\geq 0} \in V$. Na mocy (4) wystarczy teraz dobrać stałe C_1, C_2, tak aby ciąg $a_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ spełniał warunki początkowe $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$, czyli

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \alpha \\ q_1 C_1 + q_2 C_2 = \beta \end{cases}$$

Układ ten ma zawsze rozwiązanie, gdyż wyznacznik
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0.$

2. wyróżnik $\Delta = A^2 + 4B = 0$.

Wtedy wielomian charakterystyczny ma pierwiastek podwójny $q_0 = \frac{A}{2}$. Mamy więc jeden ciąg geometryczny $\{q_0^n\}_{n\geq 0} \in V$. Udowodnimy, że również ciąg $\{nq_0^n\}_{n\geq 0} \in V$. Uwzględniając, że $B = -\frac{A^2}{4} = -q_0^2$, otrzymujemy

$$A(n+1)q_0^{n+1} + Bnq_0^n = 2(n+1)q_0^{n+2} - nq_0^{n+2} = (n+2)q_0^{n+2}.$$

Wynika stąd, że ciąg $\{nq_0^n\}_{n\geq 0} \in V$. Pozostaje teraz dobrać stałe, C_1, C_2 tak aby ciąg $a_n = C_1 q_0^n + C_2 n q_0^n = (C_1 + nC_2)q_0^n$ spełniał warunki początkowe początkowe: $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$. Z łatwością obliczamy $C_1 = \alpha$ oraz $C_2 = \beta/q_0 - \alpha$.

Twierdzenie

Niech ciąg $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *spełnia warunki (3). Wówczas*

1. *jeśli* $\Delta = A^2 + 4B \neq 0$ *i* q_1, q_2 *są pierwiastkami równania charakterystycznego (6), to istnieją stałe* C_1, C_2 *takie, że dla* $n \geq 0$
$$a_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n,$$
2. *jeśli* $\Delta = A^2 + 4B = 0$ *i* q_0 *jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (6), to istnieją stałe* C_1, C_2 *takie, że dla* $n \geq 0$
$$a_n = (C_1 + nC_2) q_0^n.$$

Przykład

Wyznaczymy jawny wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego $\{F_n\}_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad dla\ n \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne ma postać

$$q^2 - q - 1 = 0.$$

Jego pierwiastkami są

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dobieramy stałe C_1, C_2 tak aby

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ q_1 C_1 + q_2 C_2 = 1 \end{cases}$$

Mamy

$$C_1 = \frac{q_2 - 1}{q_2 - q_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad C_2 = \frac{1 - q_1}{q_2 - q_1} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Tak więc

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Przykład

Wyznaczyć jawny wzór na a_n jeśli:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \quad \textit{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne ma postać

$$q^2 - 6q + 9 = 0 \quad \text{czyli} \quad (q-3)^2 = 0.$$

$q_0 = 3$ jest jego jedynym pierwiastkiem, więc wzór jawny ma postać $a_n = (C_1 + nC_2)3^n$. Uwzględniając założenie $a_0 = a_1 = 1$, obliczamy $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{2}{3}$. Tak więc

$$a_n = \left(1 - \frac{2n}{3}\right) \cdot 3^n.$$

Przykład

Niech s_n oznacza liczbę słów długości n utworzonych z liter a, b, c, które nie mają kolejnych liter a.

1. *Oblicz s_0, s_1, s_2;*
2. *Znajdź wzór rekurencyjny na s_n i oblicz s_n.*

Rozwiązanie. Jedynym słowem długości 0 jest słowo puste i nie zawiera ono kolejnych liter a, więc $s_0 = 1$. Oczywiście wszystkie słowa długości 1 spełniają definicję ciągu, więc $x_1 = 3$. Wszystkich słów długości 2 jest 9, a jedynym słowem długości 2 nie spełniającym definicji ciągu s_n jest aa, zatem $s_2 = 8$.
Słowa długości n bez kolejnych liter a są postaci $w_{n-1}b$ lub $w_{n-1}c$, lub $w_{n-2}ba$ lub $w_{n-2}ca$, gdzie w_{n-1} w_{n-2} są dowolnymi słowami długości $n-1$ oraz $n-2$ bez kolejnych liter a, odpowiednio. Stąd wynika, że ciąg $\{s_n\}$ spełnia rekurencję

$$\begin{cases} s_0 = 1, \quad s_1 = 3 \\ s_n = 2(s_{n-1} + s_{n-2}) \qquad \text{dla } n \geq 2. \end{cases}$$

W szczególności $s_3 = 2 \cdot (3+8) = 22$, $s_4 = 2 \cdot (8+22) = 60$, $s_5 = 2 \cdot (22+60) = 164$.
Wyznaczymy wzór jawny na n-ty wyraz ciągu $\{s_n\}$. Równanie charakterystyczne ma postać

$$q^2 - 2q - 2 = 0.$$

Jego pierwiastkami są $q_1 = 1+\sqrt{3}$, $q_2 = 1-\sqrt{3}$. Zatem

$$s_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n,$$

gdzie stałe C_1, C_2 spełniają układ wynikający z warunków początkowych:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3 \end{cases}$$

Stąd $C_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$, $C_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$. Tak więc

$$s_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n.$$

Zadania

1. W pewnej rodzinie mąż i żona zawarli następującą umowę: Jeżeli któregoś dnia zmywa naczynia żona, to następnego dnia zmywa naczynia mąż. Jeżeli natomiast pewnego dnia zmywa naczynia mąż, to o tym, kto zmywa naczynia następnego dnia, decyduje losowanie za pomocą rzutu monetą. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że n-tego dnia trwania umowy zmywa naczynia mąż. Przyjmujemy $p_1 = \frac{1}{2}$. Do jakiej liczby zbliżają się wartości p_n wraz ze wzrostem n?

2. Wyznaczyć liczbę takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

Dziękuję za uwagę.